

## Débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

Mamy Alain RAKOTOMALALA<sup>1\*</sup> et Soloniaina RAKOTOMIRAHO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université d'Antananarivo, École Supérieure Polytechnique, Laboratoire d'Automatique, de Signal et de Modélisation des systèmes électroniques (L.A.S.M) BP 1500 Antananarivo, 101 Madagascar

\* Correspondance, courriel : [rakotomamialain@yahoo.fr](mailto:rakotomamialain@yahoo.fr)

### Résumé

Des travaux sur l'une des applications de la transformée en ondelettes dans le domaine du traitement d'images ont été effectués en utilisant le seuillage des coefficients d'ondelettes. Ce travail contient des éléments concernant les bases d'ondelettes et une application de la transformées en ondelettes « le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes ». Les images peuvent être contaminées par des bruits de différentes origines durant leur acquisition ou leur transmission, d'où la dégradation de leurs qualités. En utilisant le processus de débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes par seuillage dur ou par seuillage doux des coefficients d'ondelettes et avec un bon choix du seuil et de l'ondelette utilisées, on arrive à apercevoir des informations dans une image bruitée. Les mesures utilisées pour évaluer la qualité de l'image débruitée sont le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) et l'indice de similarité structurelle SSIM (structural similarity). En débruitant une image bruitée avec un bruit d'écart type  $\sigma = 300$ , avec l'utilisation du seuil vérifiant  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  et l'ondelette de Haar, on obtient un PSNR de 15.3582 et de SSIM de 0.30967.

**Mots-clés :** *ondelettes, transformée en ondelettes, seuillage, image, débruitage, similarité structurelle.*

### Abstract

#### Denoising by thresholding wavelets coefficients

Works on applications of the wavelets transform in the area of the image processing using the thresholding wavelets coefficients have been undertaken. This work contains elements concerning the wavelet transform and a wavelet transform application “denoising by thresholding wavelets coefficients”. Images can be contaminated by noise them of different origins during their acquisition or their transmission, where the degradation of their qualities. By using the process of denoising by thresholding wavelets coefficients by hard or soft thresholding and with a good choice of the threshold and the wavelet used, one arrives to see information in an image noised. The measures used to estimate the quality of image denoised are the PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) and the SSIM (*structural similarity*). With using a threshold checking  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  and Haar wavelet, denoising a noised image with  $\sigma = 300$ , we obtain a PSNR of 15.3582 and a SSIM of 0.30967.

**Keywords :** *wavelets, wavelets transform, thresholding, image and denoising, structural similarity.*

## 1. Introduction

Partout autour de nous il y a toujours de signaux qui requièrent d'être analysés. Les tremblements sismiques, le discours humain, les vibrations de moteur, les images médicales, les données financières, la musique, et beaucoup d'autres types de signaux doivent être traités efficacement, comprimés, nettoyés en haut, reconstruits, décrits, simplifiés, modélisés, distingués ou situés pour être interprétés [1-8].

Les ondelettes ont apporté un souffle nouveau dans le domaine du traitement de signal et du traitement d'images depuis son apparition. Elles permettent en effet d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou à deux dimensions, et à des échelles différentes. Cette caractéristique est utilisée pour le débruitage des images. Or l'œil humain a du mal à interpréter les images bruitées; d'où la nécessité du débruitage des images en général. Le débruitage d'une image a pour but d'enlever les bruits provenant de différentes sources et aussi de pouvoir extraire les informations jugées pertinentes dans la même image qui dépendent de l'application [4]. Dans le domaine de l'imagerie médicale, le débruitage cherche à pouvoir discerner les informations utiles dans le domaine médical comme la forme, le contour, etc. Par seuillage des coefficients d'ondelettes, on peut débruiter une image par élimination des détails les plus fins.

Cet article présente le problème du débruitage par seuillage. Puis des méthodes de détermination du seuil et l'influence de la base d'ondelettes utilisée seront montrés. Des résultats obtenus par simulation de débruitage d'image seront présentés en dernière partie de ce même article.

## 2. Méthodologie

### 2-1. Principe général du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

En général, il est possible de réaliser une décomposition en ondelettes d'une image puis de reconstruire cette image à partir de ses coefficients d'ondelettes. Pourtant, cette technique n'aurait pas grand intérêt si on ne modifiait pas ces coefficients car on obtiendrait une image finale identique à l'image initiale [1][9].

Les coefficients d'ondelettes marquent les discontinuités qui interviennent dans l'image. Ils correspondent donc aux détails. Si, maintenant, on seuille ces coefficients, cela revient à éliminer les détails les plus fins de l'image. Il en découle donc deux grandes applications de cette technique de seuillage des coefficients d'ondelettes : la compression et le débruitage des images [6].

Pour le débruitage (ou "denoising") qui nous intéresse : on ne garde que les coefficients les plus grands et on met les autres à zéros puis on reconstruit l'image [2]. Le bruit correspond en général à des détails faibles donc il est éliminé par ce seuillage des coefficients d'ondelettes. Nous obtenons alors une image plus "lisse" donc débruitée.

### 2-2. Seuillage dans une base

Dans une base  $B=\{g_m\} \ 0 \leq m < N$ , un estimateur diagonal de  $f$  à partir de  $X=f+W$  s'écrit :

$$\tilde{F} = DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m (X_B [m]) g_m \quad (1)$$

avec  $d_m$ : fonction de seuillage.

$$X_B[m] = \langle X, g_m \rangle, \quad W_B[m] = \langle W, g_m \rangle \text{ et } F_B[m] = \langle F, g_m \rangle \quad (2)$$

On suppose que  $W$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ .

**2-3. Débruitage d'une image**

Les images obtenues par les différents techniques d'acquisition (radar, satellites, scanner, échographie, etc. . .) sont souvent très bruitées. Nous pouvons formuler ceci d'un point de vue mathématique en écrivant :

$$X=f+W \tag{3}$$

avec  $X$ : l'image obtenue,  $f$ : l'image de départ et  $W$ : le bruit.

On cherche alors l'opérateur de débruitage  $D$  qui permettra d'estimer l'image dans le bruit  $W$ .

Nous aurons dans une base orthogonale d'ondelettes  $B=\{g_m\}$ , l'expression :

$$DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m (X_B [m] ) g_m \tag{4}$$

$d_m$  s'appelle un seuillage.

**2-3-1. Différents types de seuillage**

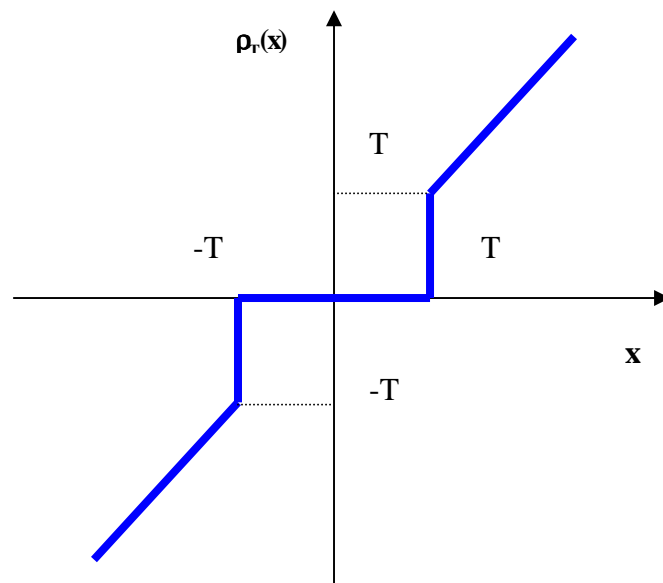
Il existe plusieurs types d'estimateurs par seuillage. Nous pouvons d'abord distinguer les seuillage dur et seuillage doux.

**2.3.1.1. Seuillage dur ou "hard thresholding"**

Le seuillage dur est celui qui est le plus "intuitif". On se fixe un seuil  $T>0$ . On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à  $T$  et on met à zéro les autres [2][3][4].

$$d_m ( x ) = \rho_T ( x ) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \tag{5}$$

Nous aurons donc le seuillage suivant :



**Figure 1 : Courbe du seuillage dur**

L'opérateur  $D$  dans l'équation précédente est alors un projecteur non linéaire dans la base  $B$ . Le risque de ce seuillage est :

$$r_t(f) = r(D, f) = \sum_{m=0}^{N-1} E \left\{ \left| f_B[m] - \rho_T(X_B[m]) \right|^2 \right\} \quad (6)$$

### 2.3.1.2 Seuillage doux ou "soft thresholding"

Dans le cas du seuillage dur, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil  $T$ . Par contre, pour ceux supérieurs à  $T$ , on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil afin de s'assurer d'avoir enlever l'effet du bruit même pour les forts coefficients [2][3][4].

$$d_m(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x - \text{sign}(x)T & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \quad (7)$$

Dans ce cas, la fonction de seuillage  $\rho_T$  est continue :

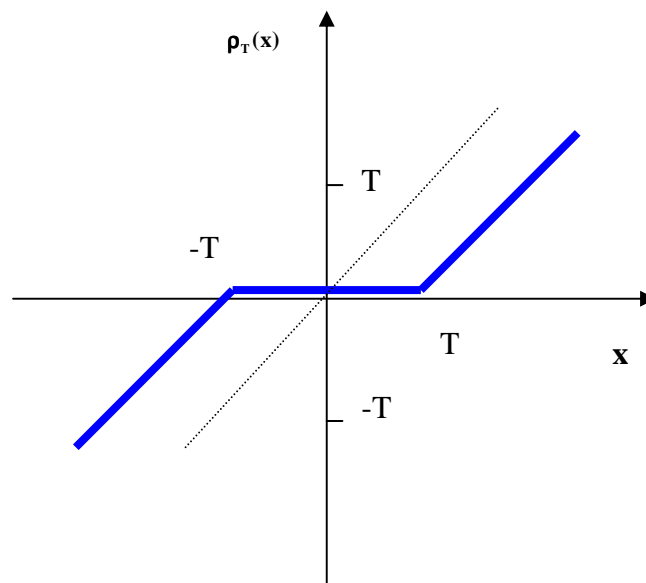


Figure 2 : Courbe du seuillage doux

Le seuil  $T$  est généralement choisi pour être avec une probabilité juste au dessus du niveau maximum des coefficients  $|W_B[m]|$  du bruit. La réduction de  $T$  de l'amplitude de tous les coefficients bruités permet de s'assurer que les amplitudes des coefficients estimés sont plus petites que celles des coefficients d'origine. Dans une base d'ondelettes où les coefficients de grande amplitude correspondent à des variations transitoires du signal, cela signifie que l'estimation ne conserve que des transitions du signal d'origine, sans en ajouter d'autres dues au bruit. Le coefficient seuillé sera donc plus petit que le coefficient du signal.

Ce type de seuillage garantit que le signal obtenu sera toujours plus régulier que le signal de départ. Ces techniques donnent des résultats qui dépendent des seuils choisis et des images que l'on prend.

En effet, quand on seuille les coefficients d'ondelettes pour enlever le bruit, on perd aussi quelques caractéristiques de l'image. Il arrive après le débruitage que :

- Les coefficients gardés contiennent du bruit.
- On a supprimé les petits coefficients qui définissent eux aussi la singularité. En effet, la mise à zéro des coefficients  $\langle f, g_m \rangle$  soustrait  $\langle f, g_m \rangle g_m$  de  $f$ . Ceci introduit des oscillations dès que  $\langle f, g_m \rangle$  n'est pas négligeable.

L'erreur en seuillage doux est, en général, plus grande qu'en seuillage dur. Il existe donc des méthodes pour tenter de trouver un seuil adapté à chaque image et c'est ce que nous allons voir par la suite.

## 2-4. Choix du seuil

Le seuillage, comme nous venons de le voir, est une technique d'estimation d'un signal ou d'une image. En général il n'est pas possible de calculer l'estimateur qui minimise le risque d'écart au signal, en le recherchant parmi tous les estimateurs possibles. Dans un premier temps, le choix le plus classique était de se limiter aux opérateurs linéaires. Il y a à peine une dizaine d'années, *Donoho et Johnstone* ont fait une percée fondamentale en montrant que des estimateurs par seuillage avaient un risque proche de la borne inférieure [8].

### 2.4.1. Risque

Un signal  $f[n]$  de taille  $N$  est contaminé par l'addition d'un bruit. Le bruit est modélisé comme la réalisation d'un processus aléatoire  $W[n]$ , dont la distribution de probabilité est connue. Les données mesurées sont :

$$X[n] = f[n] + W[n] \tag{8}$$

Le signal  $f$  est estimé en transformant les données bruitées  $X$  à l'aide d'un opérateur de décision  $D$ . L'estimateur résultant est :

$$\tilde{F} = DX \tag{9}$$

Le risque de l'estimateur  $\tilde{F}$  de  $f$  est calculé en moyenne par rapport à la distribution de probabilités du bruit  $W$  [3][4]:

$$r(D, f) = E\{ | f - DX |^2 \} \tag{10}$$

### 2.4.2. Théorème de Donoho-Johnstone

On fait l'hypothèse que le bruit est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ . *Donoho et Johnstone* ont alors montré que le risque induit par un seuillage (dur ou doux) sur les coefficients d'ondelettes pouvait être encadré par des valeurs proches de la borne inférieure obtenue avec des estimateurs d'oracle.

Notons :

$$r_p(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_b[m]|^2, \sigma^2) \tag{11}$$

le risque obtenu avec un estimateur d'oracle (c'est à dire un estimateur construit connaissant le signal recherché), et  $r_f(f)$  le risque obtenu par un seuillage de seuil  $T$ .

**Théorème : [2-4]**

$N$  est la taille du signal.

Soit :

$$T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)} \quad (12)$$

le risque  $r(f)$  d'un seuillage dur ou doux vérifie pour tout  $N$  supérieur ou égal à 4 :

$$r_t(f) \leq (2 \log_e N + 1) \left[ \sigma^2 + r_p(f) \right] \quad (13)$$

Le facteur  $2 \log_e(N)$  est optimal parmi les estimateurs diagonaux dans la base d'ondelettes  $B$ . Le problème réside alors dans la détermination de la variance  $\sigma^2$  du bruit.

On pourrait également montrer que le maximum de l'amplitude du bruit a une très forte probabilité d'être juste en dessous de  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  ce qui explique pourquoi le théorème choisit cette valeur. D'autre part, le fait que le seuil augmente avec la taille du signal est dû à la distribution gaussienne qui crée des coefficients de bruits de plus en plus grands lorsque le nombre de coefficients augmente. Ce seuil n'est cependant pas optimal et en pratique, on peut utiliser des seuils bien plus faibles pour réduire le risque. Un seuillage doux avec ce seuil produit d'ailleurs souvent un risque plus grand qu'un seuillage dur. Pour obtenir un risque de même ordre pour un seuillage doux et un seuillage dur, il faut souvent utiliser un seuil deux fois plus petit pour un seuillage doux.

**2.4.3. Estimation de la variance du bruit**

$N$  étant la taille du signal observé  $X$ , celui-ci possède  $N/2$  coefficients d'ondelettes à l'échelle la plus fine  $\mathcal{J} = 2N'$ . Le coefficient  $|\langle f, \psi_{l,m} \rangle|$  est faible lorsque  $f$  est régulière et donc  $\langle X, \psi_{l,m} \rangle \approx \langle W, \psi_{l,m} \rangle$ , et élevé si  $f$  varie brutalement sur le support de  $\psi_{l,m}$ . Un signal qui est régulier par morceaux génère donc peu de grands coefficients relativement aux  $N/2$  [4].

A l'échelle la plus fine, la composante du signal n'influence donc qu'un petit nombre de coefficients  $\langle X, \psi_{l,m} \rangle$  de grande amplitude. Les autres sont donc égaux à  $\langle W, \psi_{l,m} \rangle$  de variance  $\sigma^2$ . Un estimateur robuste de  $\sigma$  est donc obtenu à partir de la valeur médiane des valeurs absolues de ces coefficients.

Si  $M$  est la valeur médiane de  $|\langle f, \psi_{l,m} \rangle|$   $0 \leq m < N/2$  alors on peut montrer que  $E\{M\} = 0,6745 \sigma$ . On peut donc estimer  $\sigma$  par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{M}{0,6745} \quad (14)$$

Pour les images, on procède à une évaluation de la médiane sur les trois carrés de l'image correspondants aux coefficients d'ondelettes, puis on en fait la moyenne avant d'obtenir une estimation de  $\sigma$  par la formule ci-dessus.

2.4.4 Seuillage dur ou doux

Si l'on prend le seuil  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$ , un seuillage doux assure avec une forte probabilité que :

$$\left| \langle \tilde{F}, \psi_{j,m} \rangle \right| = \left| \rho_T \langle X, \psi_{j,m} \rangle \right| \leq \left| \rho_T \langle f, \psi_{j,m} \rangle \right| \quad (15)$$

L'estimateur  $\tilde{F}$  ayant des coefficients d'ondelettes plus petits que ceux de  $f$ , il est nécessairement aussi au moins régulier. Ceci n'est pas vrai pour l'estimateur par seuillage dur, qui laisse intact les coefficients au dessus de  $T$ , et qui peuvent donc être plus grand que ceux du signal à cause de la composante du bruit additif [2,3,4,8].

2.4.5. Réduction du risque [2,3,4,8]

2.4.5.1. Réduction du seuil

Pour essayer de réduire le risque par seuillage, il faut essayer de minimiser le risque estimé en fonction des valeurs de seuil. Une amélioration très sensible du risque des estimateurs par seuillage peut être obtenue avec un algorithme invariant par translation.

Il faut alors estimer  $r(f)$  à partir des données  $X$ . Pour cela on observe que :

- Si  $|X_B[m]| < T$  alors le seuillage dur ou doux annule le coefficient. Le risque est donc égal à  $|f_B[m]|^2$ . Or comme  $E\{|X_B[m]|^2\} = |f_B[m]|^2 + \sigma^2$ , on peut estimer  $|f_B[m]|^2$  par  $|X_B[m]|^2 - \sigma^2$  (16)

- si  $|X_B[m]| \geq T$  alors le seuillage doux diminue de  $T$  l'amplitude de  $X$ , le risque est donc dû à l'énergie du bruit résiduel et à l'erreur introduite en réduisant l'amplitude de  $X$ . On l'estime donc par :

$$\sigma^2 + T^2 \quad (17)$$

pour le seuillage doux, et  $\sigma^2$  pour un seuillage dur. Par la suite on se place dans le premier cas.

On construit alors l'estimateur résultant :

$$\tilde{r}_i(f, T) = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(|X_B[m]|^2) \quad (18)$$

avec

$$\Phi(u) = \begin{cases} u - \sigma^2, & \text{si } u < T \\ \sigma^2 + T^2, & \text{si } u \geq T \end{cases} \quad (19)$$

Donoho et Johnstone ont alors montré que  $\tilde{r}_i(f, T)$  est un estimateur de Stein sans biais: (*SURE: Stein Unbiased Risk Estimator*)

**Théorème :**

Pour un seuillage doux, le risque de l'estimateur de  $r_i(f)$  est sans biais [7]:

$$E \left\{ \tilde{r}_i(f, T) \right\} = r_i(f, T) \quad (20)$$

Ayant un estimateur du risque, nous allons pouvoir choisir  $T$  de façon à le minimiser. Pour trouver ce seuil, nous commençons par ordonner les coefficients d'ondelettes par ordre décroissant (numérotés de 1 à  $N$ ). Soit  $l$  l'indice tel que  $T$  soit compris entre l'indice  $l$  et l'indice  $l+1$  (strictement pour la première borne), on a alors :

$$\tilde{r}_i(f, T) = \sum_{m=l+1}^N |X_B[m]|^2 - (N-l)\sigma^2 + l(\sigma^2 + T^2) \quad (21)$$

L'estimateur du risque est alors une fonction croissante de  $T$  et il vaut mieux choisir  $T = |X_B[l]|$  (où le  $r$  signifie réordonné), pour minimiser le risque, plutôt qu'un seuil compris strictement entre le  $l^{\text{ième}}$  et le  $(l+1)^{\text{ième}}$  coefficient. Il reste alors à calculer le risque en affectant successivement à  $T$  la valeur des différents coefficients.

$$X_B[l] = X_B[m_l]: \text{Coefficient de rang } l \text{ tel que } |X_B[l]| \geq |X_B[l+1]| \text{ pour } 1 \leq l < N$$

Le calcul de  $T$  nécessitera donc  $O(N \log N)$  opérations pour réordonner les coefficients et  $O(N)$  pour trouver  $T$ .

Le seuil obtenu est normalement meilleur que celui donné dans le théorème de *Donoho-Johnstone*, il faut cependant veiller à ce que le signal ne soit pas trop faible par rapport au bruit car le seuil choisi est alors trop petit.

### **2.4.5.2. Seuillage invariant par translation [2-4,8]**

On peut alors encore améliorer l'estimateur par seuillage en moyennant les estimateurs pour des versions translatées du signal. De manière générale la représentation de  $f$  dans une base  $B$  n'est pas simplement translatée ou permutée, et le seuillage n'est pas invariant par translation. On effectue alors une estimation des signaux translatés

$$F^p = \sum_{m=0}^{N-1} \rho_T(X_B^p[m]) \cdot g_m \quad (22)$$

$$\text{avec } X_B^p[m] = \langle X[n-p], g_m[n] \rangle ;$$

On effectue alors une moyenne de ces estimateurs en n'oubliant pas de les recaler :



$$F[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{p=0}^{N-1} F^p[n+p] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \rho_T(X_B^p[m]) \cdot g_m[n+p] \quad (23)$$

Ceci donne des résultats bien meilleurs mais nécessite N fois plus d'opérations qu'un seuillage standard.

### 3. Résultats et discussion

#### 3-1. Évaluation de la qualité du débruitage par PSNR

Le rapport crête signal sur bruit, ou *PSNR* « Peak Signal to Noise Ratio » permet d'estimer la qualité d'une image reconstruite *Y* par rapport à l'original *X*. Donc au lieu de mesurer la distorsion, il mesure la fidélité du système de traitement puisqu'elle est proportionnelle à la qualité. Typiquement, chaque pixel d'une image monochrome est codé sur 8 bits, soit 256 niveaux de gris allant de 0 à 255 d'où le *PSNR* s'écrit sous la forme :

$$PSNR = 10 \text{Log}_{10} \frac{(255)^2}{MSE} \quad (dB) \quad (24)$$

Avec

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (X(i,j) - Y(i,j))^2 \quad (25)$$

*X*: image originale

*Y*: image reconstruite

*MSE*: (Mean Square Error)

Une image parfaitement reconstruite a un *PSNR* infini et une erreur quadratique moyenne ou *MSE* nulle.

#### 3.2. Estimation de la qualité d'image par l'utilisation de la similarité structurelle

##### 3.2.1. Présentation

La majorité des modèles mathématiques de l'estimation de la qualité perçue proposés sont suivis d'une stratégie de modification du *MSE* mesuré afin que les erreurs soient pénalisées conformément à leur visibilité. Nous évaluons alors un nouveau paradigme pour l'estimation de la qualité des images, précisément les images obtenues après débruitages; basé sur l'hypothèse que le système psycho-visuel humain (HVS) est très adapté pour extraire les informations structurelles [5]. Comme un exemple spécifique, nous développons une mesure de la similarité structurelle qui compare des modèles locaux d'intensités de pixels qui ont été normalisées pour la luminance et le contraste.

##### 3.2.2 Estimation de la Qualité de l'Image

Les signaux naturels de l'image sont très structurés : Leurs pixels présentent de fortes dépendances, surtout quand ils sont spatialement très proches. Ces dépendances comportent des informations importantes à propos des structures des objets dans la scène visuelle.

Bien que la plupart des mesures de la qualité sont basées sur la sensibilité de l'erreur et décomposent les signaux de l'image en utilisant des transformations linéaires, elles n'enlèvent pas les fortes dépendances.

La motivation de cette approche est de trouver une façon plus directe pour comparer les structures des signaux de référence et des signaux déformés

### 2.2.3. La nouvelle Philosophie

La nouvelle conception de mesure de qualité de l'image est basée sur la supposition que le système visuel humain est très adapté pour extraire les informations structurelles du champ visuel.

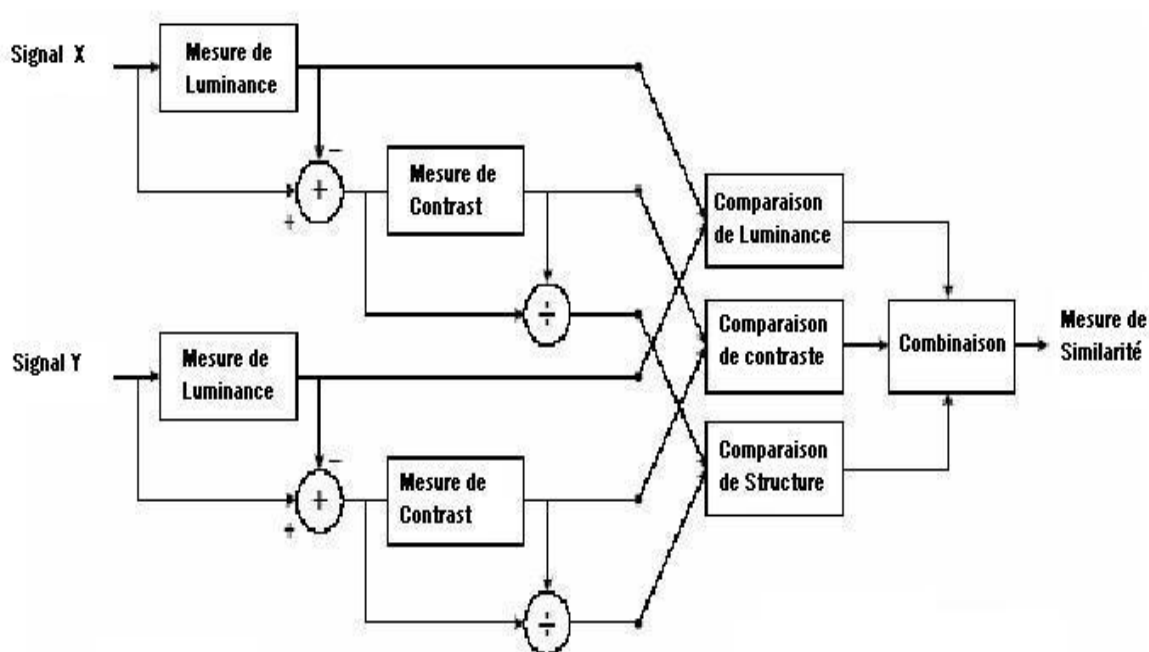
La mesure de changement des informations structurelles peut fournir une bonne approximation de la distorsion de l'image perçue. L'approche de la sensibilité des erreurs estime les erreurs perçues pour quantifier les dégradations de l'image [10]. Alors que la nouvelle philosophie considère les dégradations de l'image comme des changements perçus dans les informations structurelles. Pour une image bruitée, on a perdu des informations structurelles de l'image originale. Par conséquent, on doit obtenir un faible score de qualité.

La nouvelle philosophie ne permet pas de prédire la qualité de l'image en accumulant les erreurs associées avec des modèles simples et psycho-physiquement clairs, mais elle propose l'évaluation directe des changements structurelles entre deux signaux de structures complexes.

### 3.2.4. L'indice de la Similarité Structurale ou structural similarity (SSIM)

La luminance de la surface d'un objet qui est observé est le produit de l'illumination et de la réflexion. Mais les structures des objets dans la scène sont indépendantes de l'illumination. Par conséquent, pour explorer les informations structurelles dans une image, nous souhaitons éliminer l'influence de l'illumination. On définit, donc, les informations structurelles dans une image comme ces attributs qui représentent les structures des objets. Puisque la luminance et le contraste peuvent varier à travers une scène, nous avons utilisé la luminance et le contraste locaux pour notre définition.

Le diagramme proposé du système de l'estimation de la qualité d'image est montré dans la **Figure 3**.



**Figure 3 :** Diagramme du système de mesure de la similarité structurale (SSIM)

Le système compose la tâche de mesure de la similarité en trois comparaisons [10] :

- Luminance,

- Contraste,
- Structure.

- La comparaison de la luminance, est déterminée par l'expression suivante :

$$I(x, y) = \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \quad (26)$$

Avec

- intensité moyenne du signal x :

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (27)$$

- $C_1 = (K1 * L)^2$
- $K_1 < 1$  et  $L$  est le rang dynamique des valeurs des pixels (255 pour une image à 8 bits).

- La fonction de comparaison de contraste prend la forme suivante :

$$C(x, y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \quad (28)$$

Avec

Écart type (la racine carrée de variance) du signal original x :

$$\sigma_x = (\mu_x(x^2) - \mu_x^2)^{1/2} \quad (29)$$

- La fonction de comparaison de structure est définie comme suit :

$$S(x, y) = \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} = \frac{cov(x, y) + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \quad (30)$$

Avec

- Covariance du couple (x, y).

$$cov(x, y) = \mu_{xy} - \mu_x\mu_y \quad (31)$$

- Intensité moyenne du produit x\*y

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (32)$$

Donc la combinaison de ces trois comparaisons détermine l'Indice de similarité structurelle (SSIM) entre deux signaux x et y (on prend  $C_3 = C_2/2$  pour simplifier l'expression) :

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (33)$$

### 3.2.5. Technique de mesure de la qualité de l'image par l'utilisation de l'indice SSIM

Pour l'application, on exige une seule mesure totale de la qualité de toute l'image ; d'où un indice SSIM moyen (MSSIM) pour évaluer la qualité totale de l'image est déterminé par :

$$MSSIM(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M SSIM(x_i, y_i) \quad (34)$$

Où  $X$  et  $Y$  sont respectivement les images de référence et dégradé  $x_i$  et  $y_i$  sont les contenues des images au  $i$ -ièmes fenêtres locale.

$M$ : le nombre total de fenêtres locales dans l'image.

Les valeurs du *MSSIM* exposent une meilleure consistance avec l'apparence visuelle qualitative. Une image parfaitement reconstruite a un *SSIM* moyen égal à 1.

### 3.3 Résultats avec l'utilisation de l'ondelette de Haar

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats par simulation sous matlab [7] correspondant à différents types de paramètres d'entrée (*Tableau 1*).

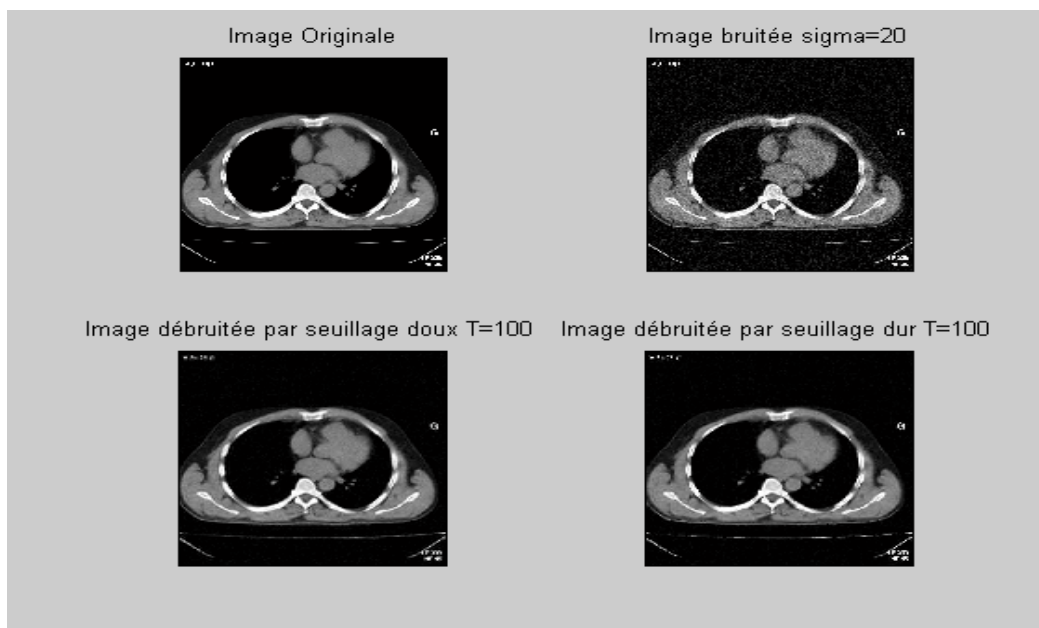
**Tableau 01** : Différents types de paramètres d'entrée

<i>Caractéristiques</i>	<i>Entrée 1</i>	<i>Entrée 2</i>	<i>Entrée 3</i>	<i>Entrée 4</i>	<i>Entrée 5</i>
<i>Image</i>	Zaza.jpg	Zaza.jpg	Zaza.jpg	Zaza.jpg	Zaza.jpg
<i>Ecart type du bruit</i>	20	40	40	100	100
<i>Seuil</i>	100	200	200	500	500
<i>Ondelette</i>	Haar	Haar	Haar	Haar	Haar
<i>Niveau de décomposition</i>	2	2	4	2	3

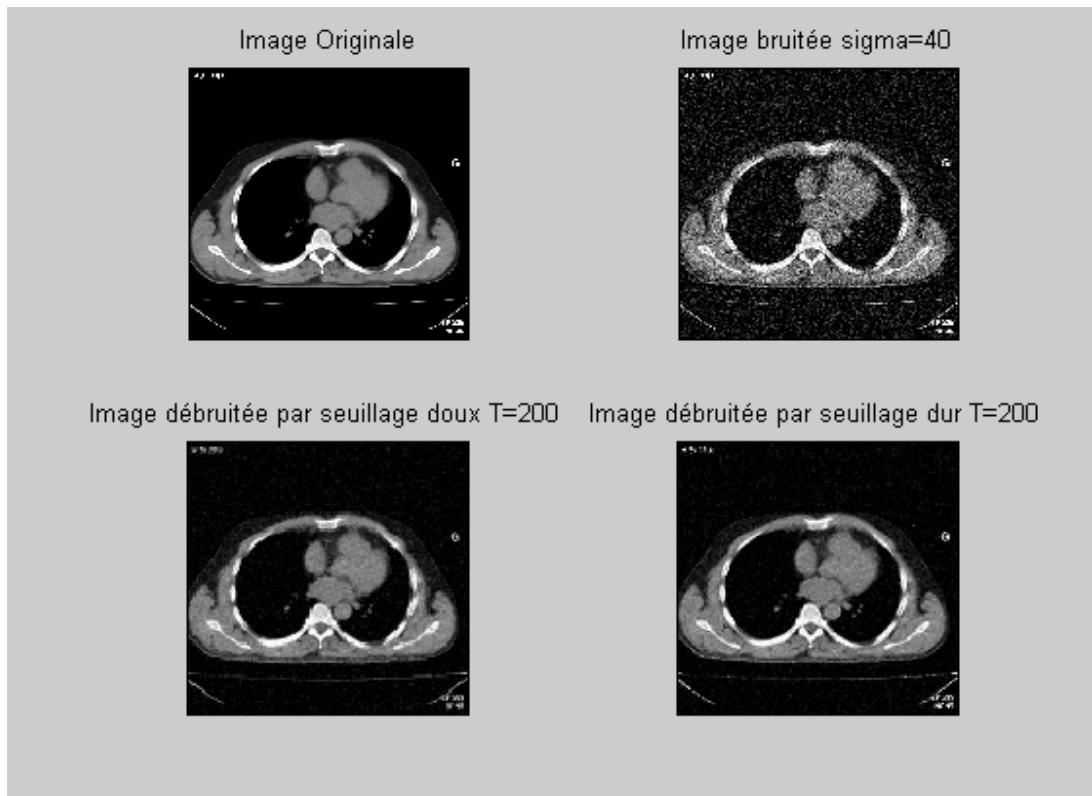
- Entrée 1

Cet exemple montre le débruitage d'une image bruitée par un bruit gaussien d'écart type 20 (*Figure 4*), le seuil  $T=100$  est conforme à l'équation  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  avec  $N = 512 \times 512$  pour cette image. L'ondelette utilisée pour la décomposition est l'ondelette de Haar, niveau de décomposition 2, le résultat est satisfaisant puisque le bruit est assez faible. Le PSNR et le SSIM obtenus sont :

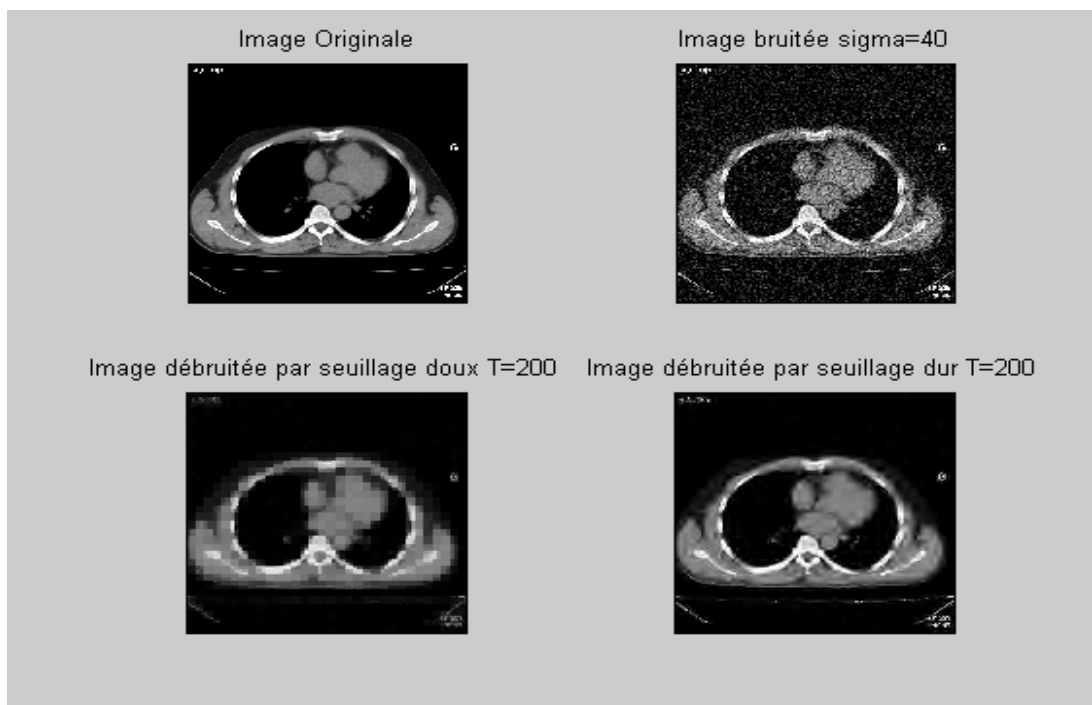
- Pour un seuillage dur, le PSNR est de 27.3574 et le SSIM est de 0.9224.
- Pour un seuillage doux, le PSNR est de 25.4919 et le SSIM est de 0.9086.



**Figure 4** : Débruitage de l'image bruitée par un bruit gaussien d'écart type 20



**Figure 5 :** Débruitage de l'image bruitée par un bruit blanc d'écart type 40 avec un niveau de décomposition 2 par l'ondelette de Haar



**Figure 6 :** Débruitage de l'image bruitée par un bruit blanc d'écart type 40 avec un niveau de décomposition 4 par l'ondelette de Haar

- Entrée 2

Si l'image est plus bruitée avec un niveau de bruit  $\sigma = 40$ , on obtient un résultat déjà bon (**Figure 05**) avec les mêmes paramètres que le cas précédent mais avec une valeur de T égale à 200.

- Pour un seuillage dur, le PSNR est de 23,4648 et le SSIM est de 0.7885.
- Pour un seuillage doux, le PSNR est de 22,7889 et le SSIM est de 0.7789.

- Entrée 3

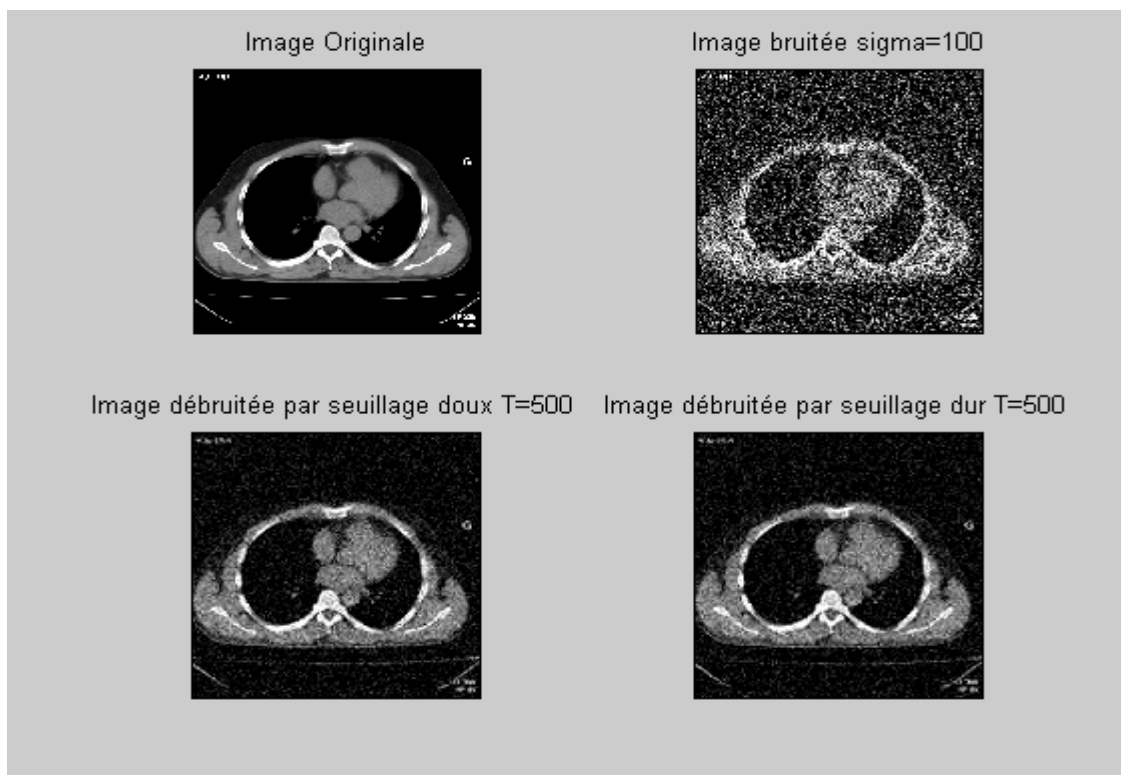
Si on augmente le niveau de décomposition, on a le résultat sur la **Figure 6**.

Dans ce cas, on obtient une image plus lisse après débruitage illustrée sur la **Figure 6**. L'image devient plus lisse avec ce niveau de décomposition parce qu'il y a filtrage passe bas de l'approximation à chaque niveau de décomposition. On obtient le PSNR et SSIM suivant :

- Pour un seuillage dur, le PSNR est de 23,2092 et le SSIM est de 0.8603.
- Pour un seuillage doux, le PSNR est de 21,4221 et le SSIM est de 0.7924.

- Entrée 4

Si notre image est fortement bruitée avec un bruit d'écart type  $\sigma = 100$  on a le résultat suivant (**Figure 07**):



**Figure 7 :** Débruitage de l'image bruitée avec un bruit d'écart type 100 avec un niveau de décomposition 2

On voit que on a du mal à identifier ce que contient l'image bruitée avec  $\sigma = 100$ . Avec un bon choix du seuil, on peut obtenir le résultat suivant.

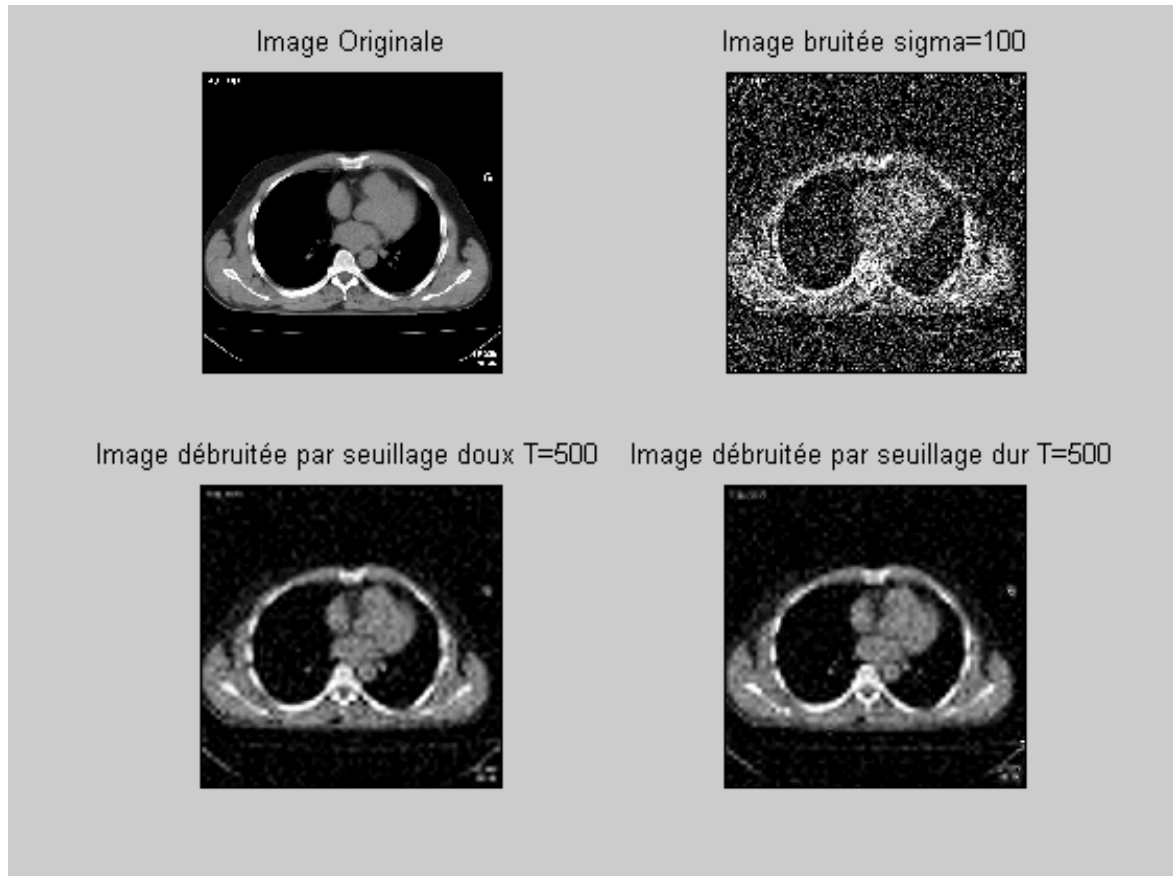
le PSNR et SSIM obtenus sont :

- Pour un seuillage dur, le PSNR est de 18,5243 et le SSIM est de 0.44824.

- Pour un seuillage doux, le PSNR est de 18,5247 et le SSIM est de 0.44806.

- Entrée 5

On peut améliorer le résultat en augmentant le niveau de décomposition, par exemple on augmente le niveau de décomposition à « 3 » le résultat est décrit sur la **Figure 8**.



**Figure 8** : Débruitage bruitée d'écart type 100 avec un niveau de décomposition 3

Si l'image est noyée dans un bruit d'écart type  $\sigma = 300$ , on ne reconnaît pas le contenu de l'image, après débruitage, on a le résultat sur la **Figure 9**.

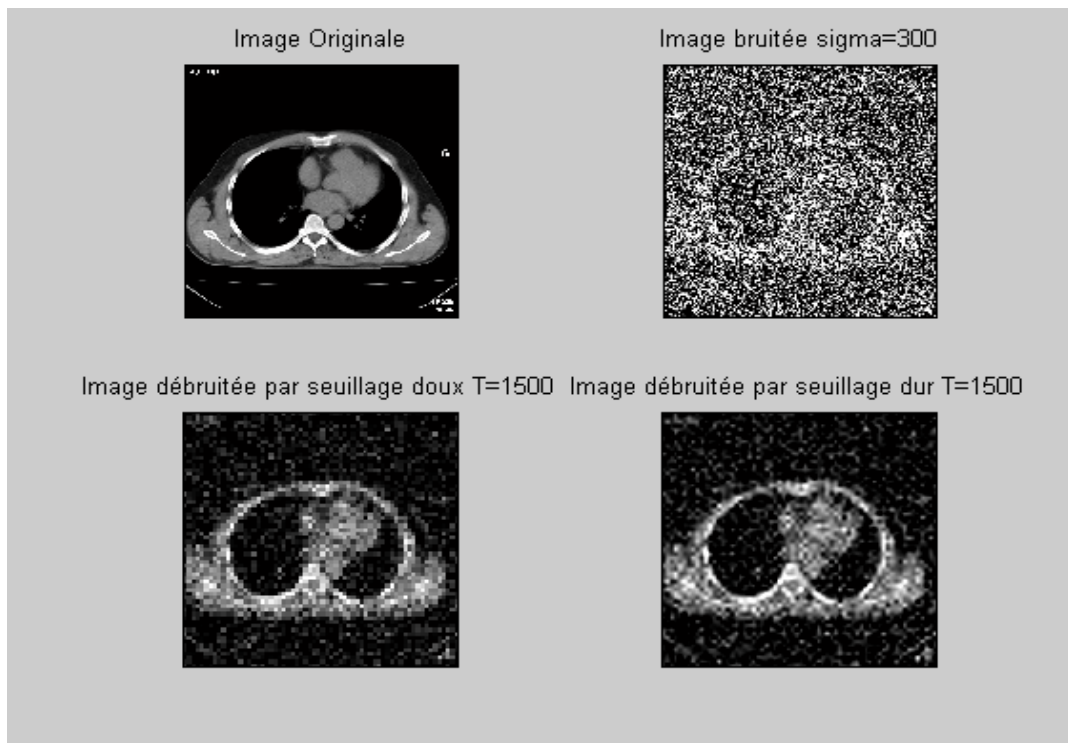
La valeur du seuil utilisée est de 1500, et l'ondelette utilisée pour la décomposition est l'ondelette de « Haar » avec un niveau de décomposition « 3 ».

Le PSNR et SSIM obtenus sont :

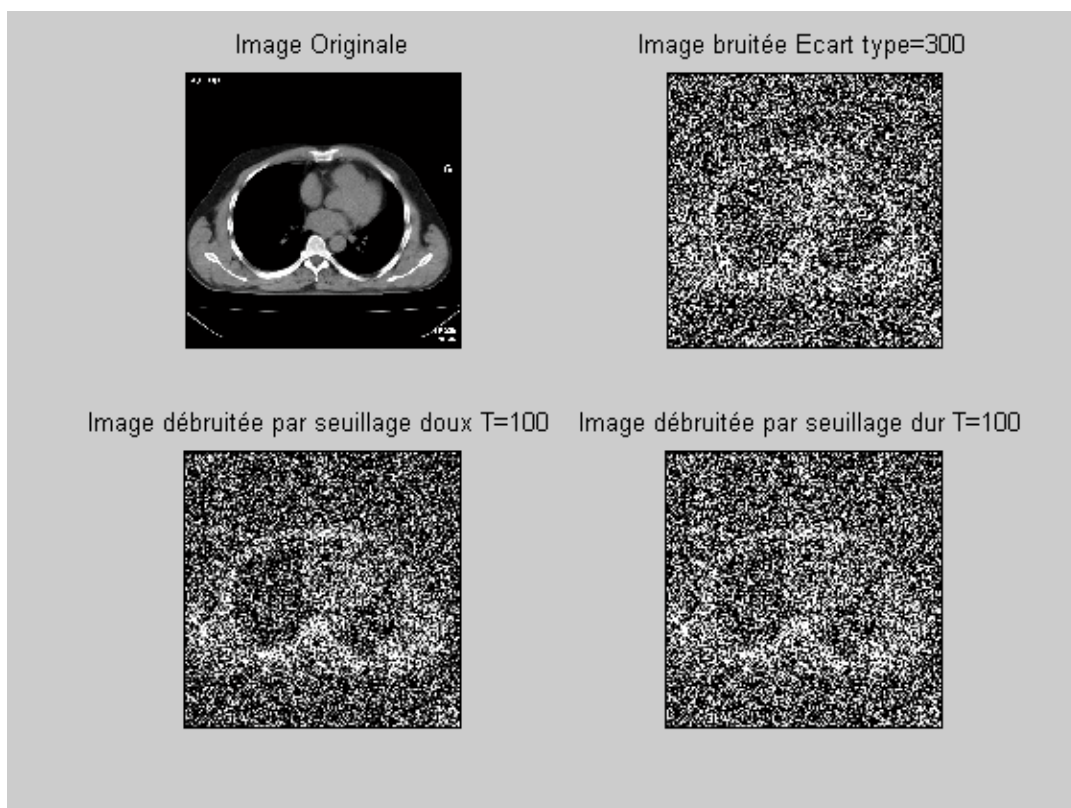
- Pour un seuillage dur, le PSNR est de 15.3582 et le SSIM est de 0.30967.
- On obtient les mêmes PSNR et SSIM pour le seuillage doux.

Mais avec un mauvais choix du seuil utilisé, on ne trouvera pas l'information recherchée.

Prenons par exemple si nous choisissons comme seuil  $T=100$  on trouve le résultat sur la **Figure 10**



**Figure 9 :** *Débruitage de l'image bruitée d'écart type 300*



**Figure 10 :** *Débruitage de l'image bruitée d'écart type 300 avec un seuil T=100*



En général, les images sont porteuses d'informations. Les bruits venant de différentes sources ont apporté des dégradations au niveau de la qualité d'une image, d'où on a du mal à appréhender ces informations.

En imagerie médicale on débruite une image pour pouvoir extraire des informations utiles dans le domaine médical comme le contour ou la forme par exemple.

Pour le débruitage d'une image par seuillage des coefficients d'ondelettes, le résultat dépend du choix du type de seuillage, du choix du seuil utilisé, du choix de l'ondelette utilisée et aussi de l'écart type du bruit. Plus l'écart type du bruit est grand, plus l'image est détruite.

Dans une base d'ondelettes, un estimateur par seuillage fait un lissage du signal bruité. Pour que les coefficients de grande amplitude correspondent à des variations du signal, on utilise des ondelettes qui ont des supports plus grands. Dans la simulation, si on prend comme ondelette de décomposition l'ondelette de « Haar », c'est le cas le plus défavorable, avec un seuillage doux ou un seuillage dur des coefficients d'ondelettes et avec un seuil  $T$  vérifiant  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$ , on arrive à obtenir des informations dans une image bruitée par un bruit d'écart type allant jusqu'à 300 avec un PSNR de 15.3582 et de SSIM de 0.30967.

Pour le seuillage dur, le seuil utilisé pour obtenir un PSNR le plus élevé se trouve autour de 1000 qui vérifie la condition  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$ .

Pour le seuillage doux, on utilise un seuil approximativement deux fois plus petit que pour le seuillage dur pour obtenir le même PSNR.

Un seuillage doux calculé pour  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  produit souvent un risque plus grand qu'avec un seuillage dur. Un seuillage doux réduit presque à zéro l'amplitude des coefficients juste au dessus de  $T$  ou juste au dessous de  $-T$ , alors qu'un seuillage dur les laisse tels quels. Pour obtenir un risque de même ordre pour un seuillage doux et un seuillage dur, il faut souvent utiliser un seuil deux fois plus petit pour un seuillage doux ce qui explique ces résultats.

#### 4. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une des applications de l'analyse en ondelettes qui est le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes. Le résultat obtenu dépend :

- du type de seuillage utilisé : seuillage dur ou seuillage doux.
- du choix du seuil utilisé : dans cet article le seuil utilisé vérifie la relation  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$ .
- de la base d'ondelette utilisée lors de la décomposition, si l'ondelette de Haar est utilisée, c'est le cas le plus défavorable et on arrive à obtenir des informations dans une image bruitée par un bruit d'écart type allant jusqu'à 300.

#### Références

- [1] - Cohen A., *«Ondelettes et traitement numérique du signal»*, Edition Masson, Paris, (1992)
- [2] - Donoho D.L. & Johnstone I.M., *«Ideal Denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases, Department of Statistics»*, Stanford University, (1994)
- [3] - Donoho D. L. , *«De-Noising By Soft-Thresholding»*, IEEE Transactions on Information Theory, (1994)

- [4] - Mallat S., *« Une exploration des signaux en ondelettes »*, Editions de l'Ecole Polytechnique, France, (2000)
- [5] - Menu J.P. et Corbe C. , *« Stimulus visuel et différentes fonctions visuelles »*, Edition technique – Encycl. Med. Chir. , ophtamologie, (1991), p26
- [6] - Misiti Y., Oppenheim G. , Poggi J. M., *« Les ondelettes et leurs applications »*, Hermès, Paris, 2003
- [7] - Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J.M , *« Wavelet Toolbox For Use with MATLAB copyright »* The MathWorks Inc, (1996 – 1997)
- [8] - Stein C., *« Estimation of the mean of multivariate normal distribution »*, Annals of statistics, 9 (1994) 195-211
- [9] - Truchetet F., *« Ondelettes pour le signal numérique »*, Edition Hermès, Paris , (1998)
- [10] - Wang Z., Bovik A.C., Seikh H.R., et Simoncelli E.P., *« Image quality assessment : from visibility to structural similarity »*, IEEE Transactions on Image Processing, volume 13, (2004)